

第2讲 二次函数之线段、面积问题

一、单线段最值问题

一条线段的长度最值问题，通常都是由动点产生的，通过从动点处作垂直等方式与直线或者抛物线相交，求这个过程产生的某条线段的最值。

思考：

- ①动点 P 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上，设 P 点横坐标为 m ，
则点 P 坐标可以表示为_____
- ②平行于 x 轴的直线上的点____坐标相同，平行于 y 轴的直线上的点____坐标相同.
- ③平行于 y 轴的线段的长度可用两个端点的____坐标之____的____表示；
平行于 x 轴的线段的长度可用两个端点的____坐标之____的____表示。

 举个“栗子”

 栗子1

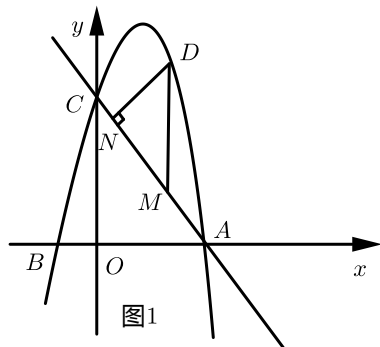
1. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(-1, 0)$ ，另一个交点为 B ，与 y 轴交于点 $C(0, -3)$ ，顶点为 D 。
 - (1) 求二次函数的解析式和点 D 的坐标。
 - (2) 若点 M 是抛物线在 x 轴下方图象上的一动点，过点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交线段 BC 于点 N ，当 MN 取最大值时，点 M 的坐标。

栗子2

2. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过 $A(4, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 4)$ 三点.

(1) 求抛物线的函数解析式.

(2) 如图1, 点 D 是在直线 AC 上方的抛物线的一点, $DN \perp AC$ 于点 N , $DM \parallel y$ 轴交 AC 于点 M , 求 $\triangle DMN$ 周长的最大值及此时点 D 的坐标.



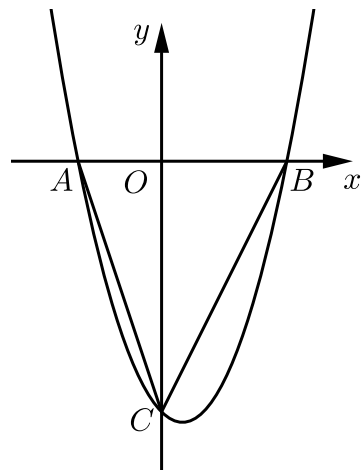
二、面积最值问题

1. 公式法

当三角形底或高在 x 轴, y 轴或在平行于 x , 平行于 y 轴的直线上时, 直接利用面积 $S =$ _____

栗子3

3. 如图所示, 二次函数 $y = x^2 - x - 6$ 的图象交 x 轴于 A , B 两点, 交 y 轴于 C 点, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.



4. 已知抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$ 与 x 轴相交于不同的两点 A 、 B .

(1) 求 m 的取值范围 .

(2) 证明该抛物线一定经过非坐标轴上的一点 P , 并求出点 P 的坐标 .

(3) 当 $\frac{1}{4} < m \leq 8$ 时, 由 (2) 求出的点 P 和点 A , B 构成的 $\triangle ABP$ 的面积是否有最值? 若有, 求出该最值及相对应的 m 值 .

2. 割补法

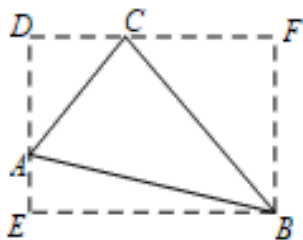
①割:

将平面内的几何图形分割成几个可以计算相应线段长度的规则图形, 分别利用公式法求每个小块图形的面积得到该几何图形的面积.

②补:

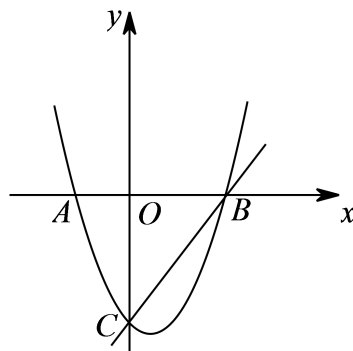
如图, 求 $\triangle ABC$ 的面积, 首先过三顶点做横平竖直的直线围成矩形, 用矩形面积减掉其他三个直角三角形的面积 (即采用整体-部分的方法求目标图形的面积) :

$S_{\triangle ABC} =$ _____



栗子4

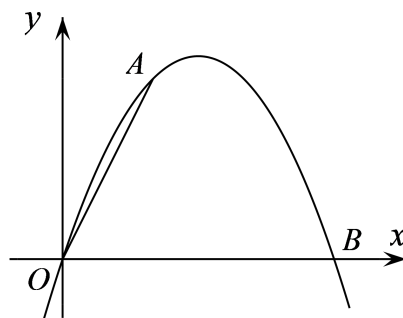
5. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx - 6$ 的图象交坐标轴于 $A(-2, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点，抛物线与 y 轴相交于点 C ，抛物线上有一动点 P 在直线 BC 下方。



- (1) 求这个二次函数的解析式。
- (2) 动点 P 运动到什么位置时， $\triangle PBC$ 面积最大。求出此时 P 点坐标和 $\triangle PBC$ 的最大面积。

栗子5

6. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图像经过点 $A(2, 4)$ 与 $B(6, 0)$ 。

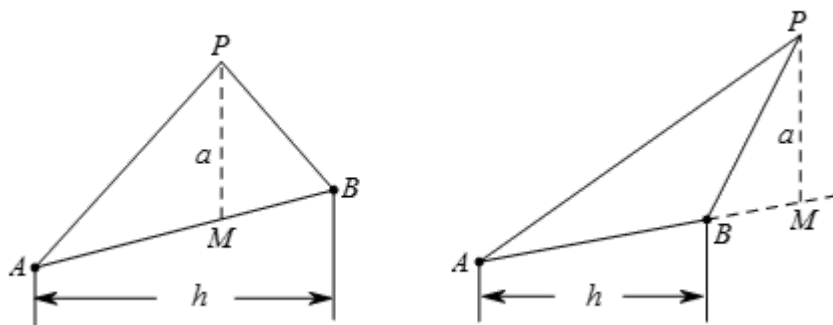


- (1) 求 a ， b 的值。
- (2) 点 C 是该二次函数图像上 A ， B 两点之间的一动点，横坐标为 x ($2 < x < 6$)，写出四边形 $OACB$ 的面积 S 关于点 C 的横坐标 x 的函数表达式，并求 S 的最大值。

3. 铅锤法

如图，过动点 P 向 x 轴作垂线，交对边 AB 于点 M ，

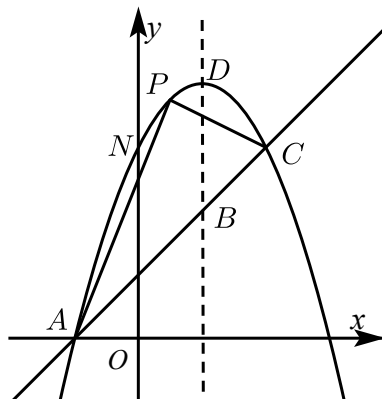
左图 $S_{\triangle PAB} =$ _____；右图 $S_{\triangle PAB} =$ _____。



记 $PM = a$ ，点 A 与点 B 之间横坐标的差值为 h ，则 $S_{\triangle APB} =$ _____。

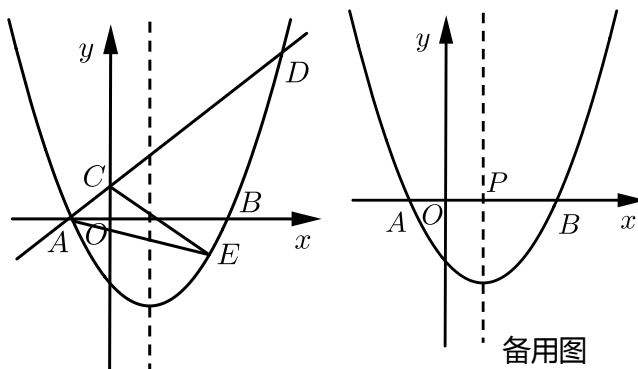
栗子6

7. 如图，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与一直线相交于 $A(-1, 0)$ 、 $C(2, 3)$ 两点，与 y 轴交于点 N ，其顶点为 D 。



- (1) 求抛物线及直线 AC 的函数关系式。
- (2) 若 P 是抛物线上位于直线 AC 上方的一个动点，求 $\triangle APC$ 的面积的最大值及此时点 P 的坐标。

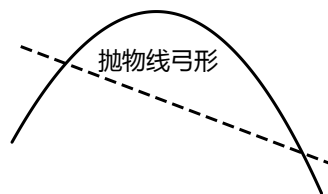
8. 在平面直角坐标系中，将二次函数 $y = ax^2 (a > 0)$ 的图象向右平移1个单位，再向下平移2个单位，得到如图所示的抛物线，该抛物线与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 的左侧）， $OA = 1$ ，经过点 A 的一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象与 y 轴正半轴交于点 C ，且与抛物线的另一个交点为 D ， $\triangle ABD$ 的面积为5.



- (1) 求抛物线和一次函数的解析式.
- (2) 抛物线上的动点 E 在一次函数的图象下方，求 $\triangle ACE$ 面积的最大值，并求出此时点 E 的坐标.

9. 如图所示，在抛物线上选定两点，我们把过这两点的线段和这条抛物线所围成的图形称作抛物线弓形．

在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 与直线 $y = x$ 相交于点 O 和点 A ， OA 截得的抛物线弓形的曲线上有一点 P ．



(1) 当 $a = 1$ 时，解答下列问题：

- ① 求 A 点的坐标．
- ② 连接 OP ， AP ，求 $\triangle OPA$ 面积的最大值．
- ③ 当 $\triangle OPA$ 的面积最大时，直线 OP 也截得一个更小的抛物线弓形，同理在这个更小的抛物线弓形曲线上也有一点 P' ，连接 OP' ， $P'P$ ，当 $\triangle OP'P$ 的面积最大时，求这个 $\triangle OP'P$ 的最大面积与②中 $\triangle OPA$ 的最大面积的比值．

(2) 将(1)中 $a = 1$ 的条件去掉后，其它条件不变，则 $\triangle OP'P$ 的最大面积与 $\triangle OPA$ 的最大面积的比值是否变化？请说明理由．

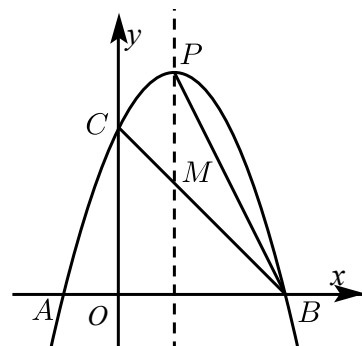
三、由面积求坐标

1. 面积相等问题

面积相等问题实质上就是利用_____的原理求解.

栗子8

10. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 三点, 对称轴与抛物线相交于点 P , 与直线 BC 相交于点 M , 连接 PB .



- (1) 求该抛物线的解析式.
- (2) 抛物线上是否存在一点 Q (不与点 P 重合), 使 $\triangle QMB$ 与 $\triangle PMB$ 的面积相等, 若存在, 求点 Q 的横坐标; 若不存在, 说明理由.

2. 面积成比例问题

栗子9

11. 在平面直角坐标系中， O 为原点，抛物线 $y = ax^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x (a \neq 0)$ 经过点 $A(\sqrt{3}, -3)$ ，对称轴为直线 l ，点 O 关于直线 l 的对称点为点 B ．过点 A 作直线 $AC \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 C ．
- (1) 求该抛物线的解析式及对称轴．
- (2) 抛物线上是否存在点 Q ，使得 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$ ，若存在，求出点 Q 的坐标，若不存在，请说明理由．